



Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

**Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)**

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

**МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ
КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ**

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

**Полтава
ПУЕТ
2015**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОПОЛОГИЙ НА КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВАХ БИЮНКТИВНЫМИ БУЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

И.Г. Величко, к.ф.-м.н., доцент

Таврический государственный агротехнологический
университет

wig64@mail.zp.ua

П.Г. Стеганцева, к.ф.-м.н., доцент

Запорожский национальный университет

steg_pol@mail.ru

Н. П. Башова,

Запорожский национальный технический университет

adamenk@rambler.ru

Пусть задано n - элементное упорядоченное множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Каждому из подмножеств данного множества поставим во взаимнооднозначное соответствие булев вектор (x_1, x_2, \dots, x_n) , в котором $x_i = 1$, если i -тый элемент множества X принадлежит этому подмножеству, и $x_i = 0$, если не принадлежит. Рассмотрим всевозможные наборы подмножеств множества X . Каждому из них поставим в соответствие булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, область истинности которой задает все подмножества, принадлежащие выбранному набору. Очевидно, что соответствие между множеством всех булевых функций от n -мерных булевых векторов и множеством всех наборов подмножеств n -элементного множества X биективно [1].

Определение 1 Топологией на конечном множестве X называется такой набор τ его подмножеств, в который включается \emptyset и все X , а также вместе с любой парой элементов набора в него включается их объединение и

пересечение.

Набор подмножеств n -элементного множества является топологией на этом множестве тогда и только тогда, когда булева функция, соответствующая этому набору, удовлетворяет следующим требованиям:

1) В область её истинности включаются булевы векторы $(0, 0, \dots, 0)$ и $(1, 1, \dots, 1)$, то есть является 0-выполнимой и 1-выполнимой.

2) Вместе с любой парой булевых векторов (x_1, x_2, \dots, x_n) и (y_1, y_2, \dots, y_n) в область истинности входят булевы векторы $(x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, \dots, x_n \vee y_n)$ и $(x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, \dots, x_n \wedge y_n)$, то есть является бионктивной (это следует из критерия бионктивности [2]).

Будем называть такую булеву функцию моделью соответствующей топологии.

Введем обозначение $e_i = \begin{pmatrix} 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0 \\ i-1 \end{pmatrix}$. Тогда

определения некоторых топологических понятий можно сформулировать в терминах булевых функций:

- минимальной окрестностью элемента x_i топологии на множестве X , которой соответствует $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, есть конъюнкция всех булевых векторов из области её истинности, на которых этот элемент принимает значение 1, то есть

$$M_{x_i} = \{ \wedge x \mid f(x) = 1 \text{ и } x \wedge e_i = e_i \};$$

- булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ соответствует T_0 -топологии на n -элементном множестве, если

$$(\forall i, j) (\exists x) f((x \vee e_i) \wedge \bar{e}_j) \vee f((x \vee e_j) \wedge \bar{e}_i) = 1,$$

где \bar{e}_i - противоположный для e_i булев вектор.

• базой булевой функции, задающей T_0 -топологию на n -элементном множестве есть набор из n булевых векторов, которые соответствуют минимальным окрестностям всех ее переменных, и нулевого булева вектора.

Сформулируем в этих терминах **критерий несущественности переменной** [3]: переменная x_i булевой функции будет несущественной тогда и только тогда, когда $f(e_i) = 1$ и для любого булева вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из базы B выполняется условие $e_i \wedge x = \theta$, где $\theta = (0, \dots, 0)$.

Весом булевой функции называют число булевых векторов в ее области истинности [3]. Рассмотрим булевы функции, моделирующие топологии, с весом более 2^{n-1} . Для них справедлива следующая доказанная авторами теорема, дающая полную классификацию таких функций.

Теорема. Булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с весом, большим числа 2^{n-1} , лежит в пересечении классов 0-выполнимых, 1-выполнимых и биюнктивных булевых функций тогда и только тогда, когда её база (при необходимости, после перенумерации переменных) имеет вид

$$1) \quad B = \{\theta, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n \vee x\}, \quad \text{где} \quad x = \bigvee_i e_i,$$

$1 \leq i \leq n-1$. При этом число существенных переменных функции равно $i+1$;

$$2) \quad B = \{\theta, e_1, e_2, \dots, e_k, e_{k+1} \vee e_k, \dots, e_n \vee e_k\},$$

$1 \leq k \leq n-2$. При этом функция будет содержать

$(n - k + 1)$ существенных переменных.

3) $B = \{\theta, e_1, e_2, \dots, e_{n-2}, e_{n-1} \vee e_1, e_n \vee e_2\}$. При этом существенных переменных будет всегда 4.

В дальнейшем планируется использовать моделирование топологий на конечных множествах биюнктивными булевыми функциями для изучения других свойств этих топологий.

Литература

1. Адаменко Н.П., Величко И.Г. Классификация топологий на конечных множествах с помощью графов // Український математичний журнал. – Київ, 2008, – т.60 –№7.– С.992-996.
2. Тарасов А. В. Обобщение критерия биюнктивности Шефера. // Дискретная математика, 24:2 (2012), 92–99.
3. Яблонский С. В., Введение в дискретную математику. Наука, Москва, 1979. 384с.